

## ГЛАВА 10. ВЫЧИСЛЕНИЕ ГЛАВНЫХ И ЭКВИВАЛЕНТНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

При расчете строительных конструкций нет необходимости определять напряжения по всем площадкам, проходящим через данную точку, а достаточно знать минимальные и максимальные значения напряжений. Минимальные и максимальные нормальные напряжения называются главными напряжениями, а площадки, на которых они действуют, называются главными площадками.

### 10.1 ГЛАВНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ

Главные напряжения и единичные векторы нормалей к главным площадкам полностью характеризуют напряженное состояние в точке [10.1], то есть позволяют вычислить все компоненты тензора напряжений.

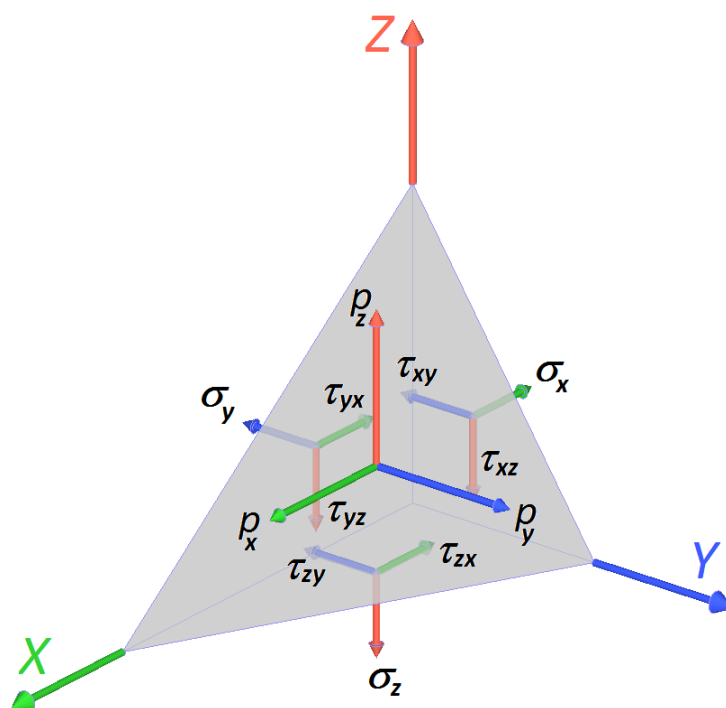



Рис. 10.1. Элементарный четырехгранник с компонентами напряженного состояния

 Нормальные напряжения обозначают буквой  $\sigma$  с индексом, соответствующим нормали к площадке, на которой они действуют. Касательные напряжения обозначают буквой  $\tau$  с двумя индексами: первый соответствует нормали к площадке, а второй — направлению самого напряжения.

Считаем, что плоскость, пересекающая координатные оси, имеет единичный вектор нормали  $\vec{n}$  с компонентами  $n_x$ ,  $n_y$ ,  $n_z$ . На гранях полученного таким образом бесконечно малого тетраэдра действуют напряжения, показанные на рис. 10.1. При этом вектор напряжений  $\vec{p}$  на наклонной площадке разложен на составляющие  $p_x$ ,  $p_y$ ,  $p_z$  вдоль координат-

ных осей. Площади граней, ортогональных координатным осям и вектору нормали, обозначим соответственно  $dF_x$ ,  $dF_y$ ,  $dF_z$ ,  $dF_p$ . Эти площади связаны соотношениями

$$dF_x = dF_p \cdot n_x, \quad dF_y = dF_p \cdot n_y, \quad dF_z = dF_p \cdot n_z, \quad (10.1)$$

вытекающими из того, что грани, ортогональные координатным осям, являются проекциями наклонной площадки на соответствующую координатную плоскость.

Проектируя силы, действующие на гранях элементарного тетраэдра, на координатные оси, получим уравнения равновесия для рассматриваемого объема. Например, проекции всех поверхностных сил на ось  $X$  дают

$$p_x dF - \sigma_x dF_x - \tau_{yx} dF_y - \tau_{zx} dF_z = 0.$$

С учетом соотношений (10.1) после сокращения на  $dF_p$  получим уравнение, связывающее проекцию  $p_x$  вектора напряжений с соответствующими компонентами тензора напряжений. Объединяя это уравнение с двумя аналогичными уравнениями, полученными проектированием сил на оси  $Y$  и  $Z$ , приходим к формулам Коши

$$\begin{aligned} p_x &= \sigma_x n_x + \tau_{yx} n_y + \tau_{zx} n_z, \\ p_y &= \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{zy} n_z, \\ p_z &= \tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y + \sigma_z n_z, \end{aligned} \quad (10.2)$$

Эти формулы определяют вектор напряжений на произвольно выбранной площадке с вектором нормали  $\vec{n}$  через компоненты тензора напряжений  $[\sigma]$

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix},$$

из которых, согласно закону парности касательных напряжений,

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx},$$

независимыми будут только шесть компонент напряжений [10.2].

Формулы (10.2) позволяют вычислить через компоненты тензора напряжений:

- полное напряжение

$$p_n = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}; \quad (10.3)$$

- нормальное напряжение

$$\sigma_n = p_x n_x + p_y n_y + p_z n_z; \quad (10.4)$$

- касательное напряжение

$$\tau_n = \sqrt{p_n^2 - \sigma_n^2}. \quad (10.5)$$

Среди всех возможных направлений вектора нормали  $\vec{n}$  существуют такие, для которых вектор напряжений  $\vec{p}$  параллелен вектору  $\vec{n}$ . На соответствующих площадках действуют только нормальные напряжения, а касательные напряжения отсутствуют — такие площадки называются главными, а нормальные напряжения на этих площадках называются главными напряжениями. Пусть площадка с единичным вектором нормали является главной. Условия параллельности векторов  $\vec{p}$  и  $\vec{n}$  есть условия пропорциональности их компонент

$$p_x = \sigma \cdot n_x, \quad p_y = \sigma \cdot n_y, \quad p_z = \sigma \cdot n_z.$$

С учетом формул Коши получим систему линейных однородных уравнений относительно неизвестных компонент  $n_x$ ,  $n_y$ ,  $n_z$  вектора нормали к главной площадке

$$\begin{aligned}(\sigma_x - \sigma)n_x + \tau_{yx}n_y + \tau_{zx}n_z &= 0, \\ \tau_{xy}n_x + (\sigma_y - \sigma)n_y + \tau_{zy}n_z &= 0, \\ \tau_{xz}n_x + \tau_{yz}n_y + (\sigma_z - \sigma)n_z &= 0.\end{aligned}\quad (10.6)$$

Эта система уравнений имеет ненулевое решение, если определитель, составленный из коэффициентов уравнений, обращается в нуль

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0.\quad (10.7)$$

Раскрывая определитель, приходим к кубическому уравнению

$$\sigma^3 - J_1\sigma^2 + J_2\sigma - J_3 = 0.\quad (10.8)$$

Для коэффициентов здесь введены обозначения

$$\begin{aligned}J_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z, \\ J_2 &= \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xz} \\ \tau_{xz} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} = \sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{yz}^2, \\ J_3 &= \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} = \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{xz}\tau_{yz} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{xz}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2.\end{aligned}\quad (10.9)$$

Уравнение (10.7) называется характеристическим уравнением для тензора напряжений. Кубическое уравнение (10.8) имеет три вещественных корня  $\sigma_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , которые обычно упорядочиваются  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ . Главные напряжения не зависят от выбора системы координат, инвариантны. Уравнение (10.8) можно записать в виде  $(\sigma_1 - \sigma)(\sigma_2 - \sigma)(\sigma_3 - \sigma) = 0$ . Сравнив с (10.8), получим формулы для коэффициентов

$$J_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \quad J_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3, \quad J_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3, \quad \text{коэффициенты характеристического уравнения называются инвариантами тензора напряжений.}$$

Каждому значению  $\sigma_i$  соответствует вектор  $\bar{n}_i$ , характеризующий положение  $i$ -й главной площадки, с компонентами  $n_{ix}$ ,  $n_{iy}$ ,  $n_{iz}$ , векторы  $\bar{n}_i$  и  $\bar{n}_j$  ортогональны при  $i \neq j$ . Для нахождения компонент векторов  $\bar{n}_i$  достаточно в уравнения (10.6) подставить найденное значение  $\sigma_i$  и решить любые два из этих уравнений совместно с условием нормировки

$$n_{ix}^2 + n_{iy}^2 + n_{iz}^2 = 1.$$

Решив систему (10.6) трижды, получим матрицу направляющих косинусов

$$[A] = \begin{bmatrix} n_{1x} & n_{1y} & n_{1z} \\ n_{2x} & n_{2y} & n_{2z} \\ n_{3x} & n_{3y} & n_{3z} \end{bmatrix}.\quad (10.10)$$

Направление главных напряжений также может быть определено тремя Эйлерами углами относительно местной системы координат (рис. 10.2):

- $\theta$  (угол нутации) — угол между положительными направлениями осей  $OZ_1$  и  $\sigma_3$  ( $0 \leq \theta \leq \pi$ ).

- $\psi$  (угол прецессии) — угол между осью  $OX_1$  и осью  $OA$  (линия пересечения плоскостей  $X_1OY_1$  и  $\sigma_1O\sigma_2$ ), положительное направление которой выбирается так, что  $OA$ ,  $OZ_1$  и  $\sigma_1$  образуют правую тройку. Угол  $\psi$  отсчитывается от оси  $OX_1$  к оси  $OY_1$  ( $0 \leq \psi \leq 2\pi$ ).
- $\varphi$  (угол чистого вращения) — угол между осями  $OA$  и  $\sigma_1$  отсчитывается от оси  $\sigma_1$  к  $\sigma_2$  ( $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ).

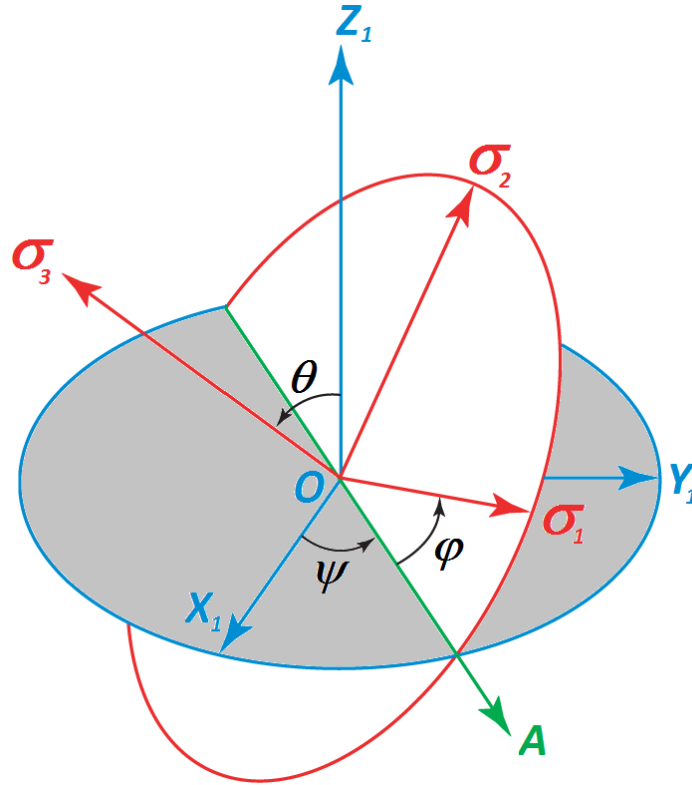


Рис. 10.2. Эйлеравые углы относительно местной системы координат

Значения углов Эйлера определяются так:  $\theta = \arccos(n_{3z})$ . При  $\theta = 0$ ,  $\varphi = 0$ ,  $\psi = \arcsin(n_{1y})$ , причем если  $n_{1x} < 0$ , то  $\psi = \pi - \arcsin(n_{1y})$ . Если  $\psi < 0$ , то  $\psi = \psi + 2\pi$ .

При  $\theta \neq 0$   $\psi = \arcsin\left(\frac{n_{3x}}{\sqrt{1-n_{3z}^2}}\right)$ , причем, если  $\left(-\frac{n_{3y}}{\sqrt{1-n_{3z}^2}}\right) < 0$ , то

$\psi = \pi - \arcsin\left(\frac{n_{3x}}{\sqrt{1-n_{3z}^2}}\right)$ . Если  $\psi < 0$ , то  $\psi = \psi + 2\pi$ .

Далее  $\varphi = \arcsin\left(\frac{n_{3z}}{\sqrt{1-n_{3z}^2}}\right)$ , причем если  $\left(\frac{n_{2z}}{\sqrt{1-n_{3z}^2}}\right) < 0$ , то  $\varphi = \pi - \arcsin\left(\frac{n_{2z}}{\sqrt{1-n_{3z}^2}}\right)$ . Если

$\varphi < 0$ , то  $\varphi = \varphi + 2\pi$ .

Пользуясь законом Гука, получим главные суммарные относительные удлинения в направлении главных напряжений.

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu \cdot (\sigma_2 + \sigma_3)],$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E} [\sigma_2 - \nu \cdot (\sigma_1 + \sigma_3)],$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E} [\sigma_3 - \nu \cdot (\sigma_1 + \sigma_2)].$$

Для изотропного тела угловые деформации не влияют на линейные и наоборот.

Для характеристики напряженно-деформированного состояния производится вычисление параметра Лоде-Надаи, характеризующего вид напряженно-деформированного состояния [10.3]


$$\mu = 2 \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} - 1. \quad (10.11)$$

Значение параметра Лоде-Надаи характеризует при

$\mu = 1$  — чистое сжатие;

$\mu = 0$  — чистый сдвиг;

$\mu = -1$  — чистое растяжение.

 Главные напряжения обладают важным свойством: по сравнению со всеми другими площадками, нормальные напряжения на главных площадках принимают экстремальные значения. Для доказательства этого свойства достаточно исследовать на экстремум нормальное напряжение как функцию  $n_x$ ,  $n_y$ ,  $n_z$  при дополнительном ограничении

$$n_{ix}^2 + n_{iy}^2 + n_{iz}^2 = 1.$$

Введем понятие среднего напряжения (гидростатическое давление)

$$\sigma_0 = (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) / 3 = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) / 3.$$

Тензор напряжений можно представить в виде суммы двух тензоров  $[\sigma] = [\mathfrak{s}] + [\tilde{d}]$ , где

$$[\mathfrak{s}] = \begin{bmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{bmatrix}, \quad [\tilde{d}] = \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_0 & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_0 & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_0 \end{bmatrix}.$$

Первый тензор называется шаровым, он характеризует изменение объема тела без изменения его формы. Второй тензор, называемый девиатором, характеризует изменение формы. Особенностью девиатора напряжений является равенство нулю его первого инварианта  $J_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z - 3\sigma_0 = 0$ .

## Пространственная задача теории упругости

Для объемных конечных элементов с использованием приведенных формул вычисляются:

- главные напряжения  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$ ;
- углы Эйлера  $\theta$ ,  $\psi$  и  $\varphi$ ;

- максимальное касательное напряжение  $\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$ ;
- главные деформации  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  и  $\varepsilon_3$ ;
- параметр Лоде-Надаи  $\mu$ .

Определение главных напряжений в этом случае производится из кубического уравнения, построенного для девиатора напряжений

$$S^3 + pS + q = 0, \quad (10.12)$$

где

$$\begin{aligned} p &= (S_x S_y + S_x S_z + S_y S_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{yz}^2), \\ q &= -(S_x S_y S_z + 2\tau_{xy} \tau_{xz} \tau_{yz} - S_x \tau_{yz}^2 - S_y \tau_{xz}^2 - S_z \tau_{xy}^2), \\ S_x &= \sigma_x - \sigma_0, \quad S_y = \sigma_y - \sigma_0, \quad S_z = \sigma_z - \sigma_0, \\ \sigma_0 &= (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)/3, \quad S_x + S_y + S_z = 0. \end{aligned}$$

Корни уравнения (10.12):

$$\begin{aligned} S_1 &= 2 \cdot \sqrt{r} \cdot \cos(\omega), \\ S_3 &= -2 \cdot \sqrt{|r|} \cdot \cos\left(\omega + \frac{\pi}{3}\right), \\ S_2 &= -2 \cdot \sqrt{|r|} \cdot \cos\left(\omega - \frac{\pi}{3}\right), \end{aligned} \quad (10.13)$$

где

$$\omega = \frac{1}{3} \arccos\left(-\frac{q}{2 \cdot r \sqrt{r}}\right), \quad r = p/3,$$

Главные напряжения вычисляются по формуле

$$\sigma_i = S_i + \sigma_0. \quad (10.14)$$

Затем вычисляется матрица направляющих косинусов (10.10).

## Плоская задача теории упругости

Моделируется плоское напряженное состояние в плоскости  $X_1 O Z_1$ . Характеристическое уравнение в случае плоского напряженного состояния имеет вид

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xz} \\ \tau_{xz} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0,$$

а в случае плоской деформации

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & \sigma_y - \sigma & 0 \\ \tau_{xz} & 0 & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0.$$

Главные напряжения вычисляются на срединной поверхности в центре тяжести каждого конечного элемента. В случае плоского напряженного состояния главные напряжения равны

$$\sigma_{1,3} = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2}, \quad \sigma_2 = 0, \quad (10.15)$$

а в случае плоской деформации

$$\sigma_{1,3} = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2}, \quad \sigma_2 = \sigma_y. \quad (10.16)$$

Угол наклона наибольшего главного напряжения  $\sigma_1$  к оси  $OX_1$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_x}{\tau_{xz}}\right), \quad (10.17)$$

если  $\tau_{xz} = 0$ , то  $\varphi = 0$ .

### КЭ плиты

Моделируется напряженное состояние в плоскости  $X_1OY_1$ , характеризующееся изгибными усилиями. Напряжения вычисляются для нижней и верхней поверхностей:

$$\sigma_x^{B/H} = \pm \frac{6M_x}{h^2}, \quad \sigma_y^{B/H} = \pm \frac{6M_y}{h^2}, \quad \tau_{xy}^{B/H} = \pm \frac{6M_{xy}}{h^2}, \quad (10.18)$$

где  $h$  — толщина плиты.

Главные напряжения и углы их наклона вычисляются по формулам (10.15) и (10.17).

В срединной поверхности возникают касательные напряжения

$$\tau_{xz} = 1.5 \frac{Q_x}{h}, \quad \tau_{yz} = 1.5 \frac{Q_y}{h}, \quad (10.19)$$

которые при вычислении главных напряжений игнорируются.

### КЭ оболочки

Моделируется напряженное состояние (в плоскости  $X_1OY_1$ ), характеризующееся нормальными и касательными напряжениями в срединной поверхности, а также изгибными усилиями. Напряжения вычисляются для нижней и верхней поверхностей

$$\sigma_x^{B/H} = N_x \pm \frac{6M_x}{h^2}, \quad \sigma_y^{B/H} = N_y \pm \frac{6M_y}{h^2}, \quad \tau_{xy}^{B/H} = N_{xy} \pm \frac{6M_{xy}}{h^2}, \quad (10.20)$$

В срединной поверхности  $\sigma_x = N_x$ ,  $\sigma_y = N_y$ ,  $\tau_{xy} = N_{xy}$ , влияние напряжений  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{yz}$  (10.19) от перерезывающих сил игнорируется.

Главные напряжения для этих поверхностей и углы их наклона вычисляются по формулам (10.15) и (10.17).

## 10.2 ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ

Расчет на прочность простых напряженных состояний, в частности, одноосного и чистого сдвига, сравнительно прост, так как эти напряженные состояния воспроизводятся при испытаниях на растяжение и на кручение стержней. Об опасности действующих напряжений можно судить, сопоставляя их с экспериментально полученной величиной (с пределом текучести для пластических материалов или с временным сопротивлением для хрупких тел). Но

чаще встречаются случаи, когда напряженное состояние не одноосное, а сложное. Проводить испытания материалов при сложном напряженном состоянии технически невозможно из-за бесконечного числа этих напряженных состояний. Поэтому был избран путь сведения сложного напряженного состояния к эквивалентному ему простому, одноосному, и сравнение эквивалентного напряжения с предельным одноосным, определяемым экспериментально. При сведении сложного напряженного состояния к эквивалентному обычно используется некоторый критерий — теория прочности. Теории прочности дают возможность находить эквивалентное напряжение как функцию главных напряжений.

Определение истинной причины разрушения материала является труднейшей задачей, что не позволило создать единую общую теорию прочности и повлекло за собой появление многих теорий прочности, каждая из которых основывается на своем критерии разрушения [10.4].

В таблице 10.1 приведены характеристики реализованных теорий прочности.

Таблица 10.1

№ п/п	Наименование теории прочности	Формула	Геометрическая интерпретация	Примечания
1	2	3	4	5
1	Наибольших главных напряжений	$\sigma_E = \sigma_1,$ $\sigma_S = \sigma_3$	Куб с центром, смещенным относительно начала координат в сторону гидростатического давления	Исторически первая теория прочности — предложенная Г. Галилеем. Удовлетворительно описывает предельное состояние весьма хрупких, достаточно однородных материалов, таких как стекло, гипс, некоторые виды керамики
2	Наибольших главных деформаций	$\sigma_E = \sigma_1 - \nu \cdot (\sigma_2 + \sigma_3),$ $\sigma_S = \sigma_3 - \nu \cdot (\sigma_1 + \sigma_2)$	Равносторонний коосугольный параллелепипед с осью симметрии, равнонаклоненной к координатным осям	Предложена Э. Мариоттом и развита Б. Сен-Венаном. Ввиду малой достоверности в настоящее время почти не применяется
3	Наибольших касательных напряжений	$\sigma_E = \sigma_1 - \sigma_3,$ $\sigma_S = 0$	Правильная шестигранная призма, равнонаклоненная к осям координат	Предложена Ш. Кулоном. Удовлетворительно описывает предельное состояние пластичных малоупрочняющихся материалов (отпущенные стали), для которых характерна локализация пластических деформаций
4	Энергетическая	$\sigma_E = \sigma_i,$ $\sigma_S = 0$	Круговой цилиндр, описанный вокруг призмы, интерпретирующей теорию максимальных касательных напряжений	Предложена М. Губером, Г. Генки, Р. Мизесом. Хорошо описывает предельное состояние широкого класса пластичных материалов (медь, никель, алюминий, углеродистые и хромоникелевые стали)
5	Теория О. Мора	$\sigma_E = \sigma_1 - \chi \cdot \sigma_3,$ $\sigma_S = \frac{\sigma_1}{\chi} - \sigma_3$	Шестигранная равнонаклоненная к осям пирамида	Применяется для установления предельного состояния достаточно однородных материалов, по разному сопротивляющихся растяжению и сжатию



Продолжение Таблицы 10.1

1	2	3	4	5
6	Друккера – Прагера	<p>При <math>\sigma_0 \leq 0</math></p> $\sigma_E = (\chi - 1) \cdot \sigma_0 + \frac{\sigma_i}{3} (\chi + 2).$ <p>При <math>\sigma_0 &gt; 0</math></p> $\sigma_E = \left(1 - \frac{1}{\chi}\right) \cdot \sigma_0 + \frac{\sigma_i}{3} \left(1 + \frac{2}{\chi}\right).$ $\sigma_S = 0$	Двуполостной параболоид вращения, равнонаклоненный к осям координат	Удовлетворительно описывает предельное состояние сравнительно пластичных материалов, для которых параметр $\chi > 0.3$
7	Писаренко – Лебедева	$\alpha = \frac{27 J_3}{2\sigma_i^3} \text{ при } \sigma_i \leq 0 \text{ — } \alpha = 0.$ <p>При <math>\sigma_0 \leq 0</math></p> $\sigma_E = (\chi - 1)\sigma_0 + \frac{\sigma_i}{3} [3 - (1 - \chi)(\sqrt{3} \cos \psi - \sin \psi)].$ <p>При <math>\sigma_0 &gt; 0</math></p> $\sigma_E = \left(1 - \frac{1}{\chi}\right)\sigma_0 + \frac{\sigma_i}{3\chi} [3 - (1 - \chi)(\sqrt{3} \cos \psi - \sin \psi)].$ $\sigma_S = 0$	Коническая поверхность, описанная вокруг пирамиды Мора. В сечении октаэдрической плоскостью — равносторонний криволинейный треугольник	Хорошо описывает предельное состояние широкого класса достаточно однородных конструкционных материалов. При $R_t = R_c$ преобразуется в энергетическую теорию. В случае, когда $R_t \ll R_c$ (весьма хрупкие материалы), результаты вычислений практически совпадают с данными расчета по теории наибольших главных напряжений
8	Гениева	<p>При <math>\sigma_0 \leq 0</math></p> $\sigma_E = -3\sigma_0(1 - \chi) + \beta\sigma_i^2.$ <p>При <math>\sigma_0 &gt; 0</math></p> $\sigma_E = -3\sigma_0\left(\frac{1}{\chi} - 1\right) + \frac{\beta}{\chi}\sigma_i^2.$ $\sigma_S = 0$	—	Хорошо описывает предельное состояние бетона
9	Кулона – Мора	$\sigma_E = (1 - \chi) \left( \sigma_0 - \frac{\sigma_i \sin \psi}{3} \right) + (1 + \chi) \frac{\sigma_i \cos \psi}{\sqrt{3}},$ $\sigma_S = 0$	—	Грунт
10	Боткина	$\sigma_E = \frac{1}{2} [3\sigma_0(1 - \chi) + \sigma_i(1 - \chi)],$ $\sigma_S = 0$	—	Грунт

Условные обозначения

$\sigma_E$  — эквивалентное напряжение при растяжении;

$\sigma_S$  — эквивалентное напряжение при сжатии;

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  — главные напряжения;

$\sigma_0 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$  — среднее напряжение;

$\sigma_i = \sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2}}$  — интенсивность напряжений;

$\alpha = \frac{27 J_3}{2\sigma_i^3}, \psi = \frac{1}{3} \arcsin(\alpha), J_3 = (\sigma_1 - \sigma_0)(\sigma_2 - \sigma_0)(\sigma_3 - \sigma_0);$


$\sigma_t, \sigma_c$  — предельные напряжения растяжения и сжатия, для грунтов  $\sigma_t = \frac{2C \cos \varphi}{1 + \sin \varphi}, \sigma_c = \frac{2C \cos \varphi}{1 - \sin \varphi};$


$C$  — сцепление;

$\varphi$  — угол внутреннего трения;

$\chi = \frac{|\sigma_t|}{|\sigma_c|}, \beta = \frac{1}{|\sigma_c|}.$

Вычисление главных и эквивалентных напряжений в пластинчатых и объемных конечных элементах по усилиям от отдельных загрузений, а также по расчетным сочетаниям загрузений (РСН) или по расчетным сочетаниям усилий (PCY) производится в момент вывода этой информации на экран.

Для визуализации главных и эквивалентных напряжений в пластинчатых конечных элементах в результатах расчета предусмотрен режим **Главные и эквивалентные напряжения пластин**. Переход в режим осуществляется с помощью команды меню **Результаты**  $\Rightarrow$  **Напряжения в пластинах**, одноименной команды на вкладке ленты **Результаты** либо кнопки  на панели инструментов.

Для визуализации главных и эквивалентных напряжений в объемных конечных элементах в результатах расчета предусмотрен режим **Главные и эквивалентные напряжения объемных элементов**. Переход в режим осуществляется с помощью команды меню **Результаты**  $\Rightarrow$  **Напряжения в объемных КЭ**, одноименной команды на вкладке ленты **Результаты** либо кнопки  на панели инструментов.

Режимы подробно описаны в п. 3.4.